Devoir maison - Équations différentielles et DLs

Cette fois encore, on attachera un soin tout particulier à la rédaction, toutes les réponses devront être justifiées. N'hésitez surtout pas à faire des phrases ; par contre, hésitez suffisamment longtemps avant d'écrire des choses qui n'auraient pas de sens.

Exercice 1.— Méthode des coefficients indéterminés
En utilisant la méthode des coefficients indéterminés, donner la forme des solutions des équations différentielles suivantes. Gardez-vous bien de calculer les coefficients !

1. $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = x - 3 + \cos(2x)$
2. $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = e^{-x}\sin(3x)$
3. $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = (5x - 4)e^{-x}$
4. $y'(x) + 5y(x) = 2x^2 - 8$
5. $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = x - 3 + \cos(2x)$
6. $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 7e^{-2x}$

Exercice 2.— Variation de la constante
Résoudre l'équation différentielle

$$y'(x) - 2xy(x) = \tan(x)e^{x^2}.$$

Exercice 3.— Limite d'une solution
Soit q une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x q(t)dt = +\infty$. Soit y une solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle

$$y'(x) + q(x)y(x) = 0.$$

Montrer que $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

Exercice 4.— Variables séparées
Résoudre l'équation différentielle suivante

$$y'(x) = \frac{4y^2(x) + 4y(x) + 10}{12\sqrt{1 - x^2}}$$

avec la condition initiale que $y(0) = -\frac{1}{2}$. Prenez soin de préciser sur quels intervalles les solutions sont définies et affolez-vous si vous ne rencontrez pas de trigonométrie.

Exercice 5.— Une équation d'Euler

1. Soit $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction. Posons $z : t \mapsto y(e^t)$. Montrer que z est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si y est dérivable sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que si y est solution de l'équation différentielle
$$ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0,$$
alors la fonction z de la question précédente est solution de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants
$$az''(t) + (b - a)z'(t) + cz(t) = 0.$$
3. Résoudre l'équation différentielle
$$x^2y''(x) + y(x) = 0.$$
4. Montrer que si $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable telle que pour tout $x > 0$, $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, alors f est solution de l'équation $x^2f''(t) + f(t) = 0$. Remarquez que ce n'est qu'une implication et pas une équivalence.
5. Déterminer l'ensemble des fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dérivables telles que pour tout $x > 0$, f vérifie
$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$